PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Notations et objectif du problème

Le but du problème est d'étudier une méthode de calcul des intégrales du type

$$\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda} R(t)\,dt,$$

où λ est un nombre réel appartenant à $]0, 1[$, et où R est une fonction rationnelle à coefficients réels ou complexes, dont les pôles sont simples et n'appartiennent pas à $[0, 1]$. Pour cela, on calcule les intégrales

(1) $$I(a, \lambda) = \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}}{a-t}\,dt,$$

où a est un nombre complexe n'appartenant pas à $[0, 1]$, et

(2) $$I_k(\lambda) = \int_0^1 t^{k+\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}\,dt,$$

où k est un entier naturel.

Dans les deux cas, on se ramène au calcul de $I_0(\lambda)$, notée plus simplement $I(\lambda)$. Ainsi,

$$I(\lambda) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}\,dt.$$

I. CALCUL DES INTÉGRALES $I_k(\lambda)$

1. Transformation de l'intégrale $I(\lambda)$.

a. Établir que l'intégrale $I(\lambda)$ est convergente.

b. À l'aide d'un changement de variable homographique, montrer que

(3) $$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\lambda-1}}{1+u}\,du.$$

c. En déduire que $I(\lambda) = A(\lambda) + A(1-\lambda)$, où $A(\lambda) = \int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{1+u}\,du$.

2. Développement en série de $I(\lambda)$.

a. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout élément u de $[0, 1]$,

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \ldots + (-1)^{n-1}u^{n-1} + (-1)^n \frac{u^n}{1+u}.$$

b. Montrer que $0 \leqslant \int_0^1 \frac{u^{n+\lambda-1}}{1+u}\,du \leqslant \frac{1}{n+\lambda}$.

c. En déduire que $A(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lambda}$, cette série étant convergente.

d. Prouver finalement que (4) $$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2},$$

cette série étant absolument convergente.

Tournez la page S. V. P.

3. Sommation de cette série et calcul de $I(\lambda)$.

Soit φ_λ la fonction 2π-périodique telle que, pour tout point t de $[-\pi, \pi]$, $\varphi_\lambda(t) = \cos \lambda t$.

a. Représenter graphiquement φ_λ lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{3}$.

b. Étudier la continuité et la dérivabilité de φ_λ, ainsi que sa parité.

c. Calculer les coefficients de Fourier de φ_λ.

d. Montrer que φ_λ est développable en série de Fourier, et que, pour tout nombre réel t,

$$\varphi_\lambda(t) = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}\left[1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{\lambda^2 - n^2}\right].$$

e. Prouver finalement que

$$I(\lambda) = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}. \tag{5}$$

4. Application au calcul des intégrales $I_k(\lambda)$.

a. Prouver que, si $k \geqslant 1$,

$$I_k(\lambda) = \frac{k + \lambda - 1}{k} I_{k-1}(\lambda).$$

À cet effet, on pourra intégrer par parties l'intégrale $I_{k-1}(\lambda) - I_k(\lambda)$.

b. En déduire la valeur de $I_k(\lambda)$.

II. CALCUL DES INTÉGRALES $I(a, \lambda)$

La méthode consiste à se ramener au calcul de l'intégrale

$$J_r(\theta) = \int_0^{+1} \frac{t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}}{1 - (1 - re^{i\theta})t}\,dt, \tag{6}$$

dont on établira la convergence absolue lorsque r est un nombre réel strictement positif et 0 appartient à $]-\pi, \pi[$.

1. Calcul de l'intégrale $J_r(0)$.

a. On suppose que $r \neq 1$. Déterminer toutes les fonctions homographiques $t \longmapsto v(t)$ dont le domaine de définition contient $[0, 1]$ et telles que $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$. Parmi ces fonctions, montrer qu'il en existe une et une seule, notée $t \longmapsto u(t)$, telle que $|u(t)| \to +\infty$ si $t \to \frac{1}{1-r}$, et expliciter u.

b. En utilisant le changement de variable $t \longmapsto u(t)$, exprimer $J_r(0)$ en fonction de $I(\lambda)$ et en déduire que

$$J_r(0) = r^{-\lambda} \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}, \tag{7}$$

formule encore valable lorsque $r = 1$.

Tournez la page S. V. P.

2. Calcul de l'intégrale $J_r(\theta)$.

Dans cette question r est un élément donné de $]0, +\infty[$.

Pour tout entier naturel $n > 2$, on considère la fonction F_n définie sur $]-\pi, \pi[$ par la relation

$$F_n(\theta) = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}}{1-(1-re^{i\theta})t}\,dt.$$

a. Montrer que F_n est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ et calculer $F_n'(\theta)$.

b. Prouver que F_n converge uniformément vers J_r sur tout segment $[-\pi+\alpha, \pi-\alpha]$ contenu dans $]-\pi, \pi[$.

c. Prouver que F_n' converge uniformément sur un tel segment vers G_r, où

$$G_r(\theta) = \int_0^1 t^{\lambda}(1-t)^{-\lambda} \frac{-ire^{i\theta}}{[1-(1-re^{i\theta})t]^2}\,dt.$$

d. En déduire que J_r est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ et que $J_r' = G_r$.

e. Établir que, pour tout élément θ de $]-\pi, \pi[$,

(8) $$J_r'(\theta) = -i\lambda J_r(\theta).$$

Pour cela, on pourra intégrer $G_r(\theta)$ par parties, en calculant d'abord l'unique primitive de

$$t \longmapsto \frac{re^{i\theta}}{[1-(1-re^{i\theta})t]^2}$$

s'annulant au point 1.

f. À l'aide des relations (7) et (8), montrer que

(9) $$J_r(\theta) = r^{-\lambda} e^{-i\lambda\theta} \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}.$$

3. Calcul des intégrales $I(a, \lambda)$.

a. Montrer que l'application qui à tout nombre complexe non nul a associe $1 - \frac{1}{a}$ définit une bijection de l'ensemble U des nombres complexes n'appartenant pas à $[0, 1]$ sur l'ensemble V des nombres complexes différents de 1 et n'appartenant pas à l'axe réel négatif $]-\infty, 0]$.

b. Soit a un élément de U ; montrer qu'il existe un élément (r, θ) et un seul de $]0, +\infty[\times]-\pi, +\pi[$, distinct de $(1, 0)$ tel que $1 - \frac{1}{a} = re^{i\theta}$, et prouver que, dans ces conditions,

(10) $$I(a, \lambda) = (1-re^{i\theta}) r^{-\lambda} e^{-i\lambda\theta} \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}.$$

c. En déduire une méthode de calcul des intégrales $\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda} R(t)\,dt$ indiquées en tête de l'énoncé.

d. Appliquer cette méthode au calcul des intégrales

$$\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}}{1+t^3}\,dt.$$